

Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

A9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Masse petite. Masse m . Vecteur unité radial. Moment signétique. Contrepoids de masse grand. Contraction des longueurs. Mouvement de la masse petit. ρ carré ϕ . Moment de force. Somme de la coordonnée de position. Angle d'équilibre. Énergie cinétique. Vecteur vertical. Équation du mouvement. Somme des carré des composantes.



[vers la recherche de séquences vidéo](#)

(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)



[vers la vidéo](#)

Center for Digital Education. Plus de matériel de soutien pédagogique ici :

<https://www.epfl.ch/education/educational-initiatives/cede/educational-technologies-gallery/boocs-en/>

page 1/36

Applications - Chapitre 9

Moment cinétique, moment de force
et loi de la gravitation

EPFL

Dr. Sylvain Bréchet

A.9 Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

1 / 19

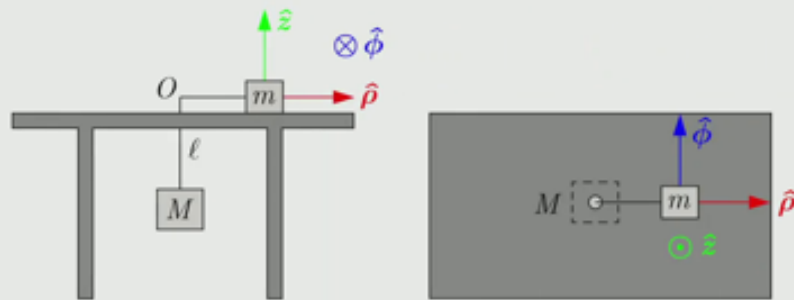
...

notes

résumé

0m 0s





- Une table horizontale est percée d'un trou. Une masse m glisse sans frottement sur la table. Elle est attachée à un fil de masse négligeable qui coulisse sans frottement à travers le trou. Un contrepoids de masse M est attaché à l'autre extrémité du fil de longueur ℓ .

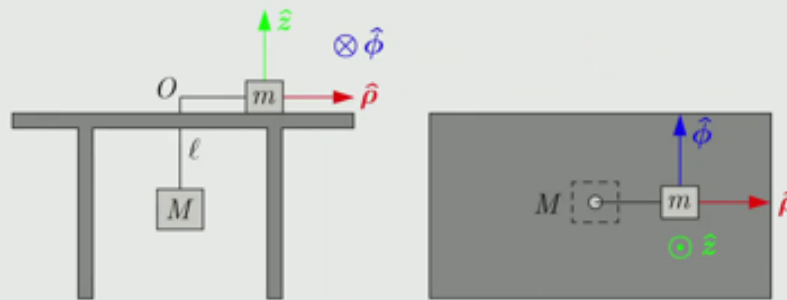
Ces sous-titres ont été générés automatiquement marche le coup. Comme on a parlé de relativité ce matin, on terminera le cours de cet après-midi en parlant aussi de relativité et je vous présenterai une expérience absolument incroyable. Il y a quelque chose que vous pouvez imaginer comme étant invisible qu'on va démontrer dans cet auditoire. C'est quelque chose dont vous avez peut-être entendu parler, peut-être pas. Ça s'appelle la contraction des longueurs en relativité. On va démontrer, on va observer la contraction des longueurs dans cet auditoire. Alors vous pensez peut-être que pour qu'on observe la contraction des longueurs, il faut que les vitesses soient très grandes ? Oui et non. Il y a une parade et je vous en parlerai à la fin de ce cours. D'accord ? C'est l'expérience qui est ici qui a mon sens la plus belle expérience qu'on est dans tous les auditoires de physique. Vous l'avez retout à l'heure. Alors vous avez ici présent sur les écrans un planétarium qui me permet de montrer la rotation de la Terre autour du soleil avec la Lune qui tourne autour de la Terre. D'accord ? Bon je vais l'éteindre. C'était juste en guise d'introduction. On a beaucoup parlé de gravitation ce matin. On en parlera un petit peu moins cet après-midi. En revanche, on va s'intéresser aux rotations et on va s'intéresser à des modélisations qui font intervenir le moment signétique et le moment de force. D'accord ? La première, c'est une table à trou. Une table à trou avec deux masses, une masse qui se trouve sur la table, une masse qui se trouve sous la table et on va essayer de déterminer la dynamique qui va faire intervenir le moment signétique. Et le deuxième exemple qu'on va prendre, c'est un équilibre en rotation. L'équilibre, vous le voyez en ce moment, c'est la manie qui se trouve sur votre droite où vous avez un contrepoids

notes

résumé

0m 1s





- Une table horizontale est percée d'un trou. Une masse m glisse sans frottement sur la table. Elle est attachée à un fil de masse négligeable qui coulisse sans frottement à travers le trou. Un contrepoids de masse M est attaché à l'autre extrémité du fil de longueur ℓ .

taché en fil qui est enroulé autour d'un disque et vous avez une barre qui est fixée sur le disque. Et sur la barre, vous avez un autre contrepoids. Clairement, le système est à l'équilibre. Est-ce que l'équilibre est toujours possible ? Oui ou non ? On verra que ça dépend des conditions. Ça fait intervenir des conditions trigonométriques. D'accord ? On va en discuter. On va également montrer que l'équilibre est stable et que l'équilibre est instable. Mais je vous propose qu'on commence tout de suite par l'exercice de la table à trou

notes

résumé

① Masse m :

- Energie cinétique : (A.9.1)

$$T_m =$$

- Energie potentielle : (réf. table)

$$V_m = \quad (A.9.2)$$

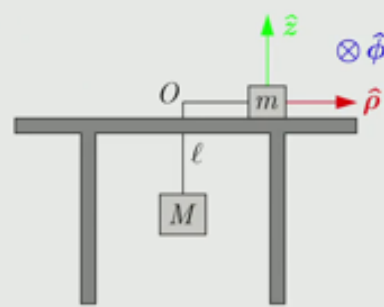
② Masse M :

- Energie cinétique :

$$T_M = \quad (A.9.3)$$

- Energie potentielle : (réf. table)

$$V_M = \quad \text{où} \quad (A.9.4)$$



qu'on va traiter de manière énergétique. D'accord ? Donc vous avez ici la table vu le profil. Vous avez une masse petite m qui est posée sur la table. Il y a un trou au centre de la table, ce que vous voyez en vue d'avion. Il faut penser à une de ces tables de jardin. D'accord ? Avec un trou. Mais contrairement à une table de jardin, il faut imaginer que c'est une table à air. D'accord ? Qui n'a aucun frottement. Et donc que la masse m qui est posée sur la table peut se déplacer librement. On peut par exemple tourner librement autour de l'origine qu'on placera au centre de la table. Au bout du fil qui a une longueur L , se trouve un contrepoids de masse grand thème. Ce qu'on désire étudier, c'est la dynamique du système. D'accord ? Donc compte tenu du fait que la masse petite m peut tourner autour de l'origine qui est ici, on va prendre des coordonnées cylindriques. Avec un vecteur unité radial rechapé orienté vers l'extérieur, on veut évidemment prendre un vecteur vertical qui sera orienté vers le haut. Et donc on va choisir un vecteur azimutal unité orienté comme ceci dans le sens trigonométrique. Donc le produit vectoriel de roue chapeau avec fichapo va nous donner un vecteur qui pointe vers le haut. Donc là en termes de notation, un vecteur qui sort du plan est noté par un point qui est inscrit dans un cercle. Pourquoi ? Imaginez une flèche à l'ancienne, une flèche de robins des bois. D'accord ? Vous avez à l'avant un bouconique. Si vous regardez le bouconique, ce que vous voyez, c'est l'extrémité, la pointe du cône, inscrit dans un cercle, ça c'est une flèche sortant. C'est un vecteur qui sort du plan, orthogonal au plan. D'accord ? Et si vous avez un vecteur entrant, ce que vous allez voir, c'est la partie circulaire

notes

résumé

2m 52s



① Masse m :

- Energie cinétique : (A.9.1)

$$T_m =$$

- Energie potentielle : (réf. table)

$$V_m = \quad (A.9.2)$$

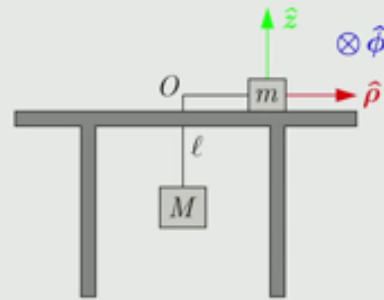
② Masse M :

- Energie cinétique :

$$T_M = \quad (A.9.3)$$

- Energie potentielle : (réf. table)

$$V_M = \quad \text{où} \quad (A.9.4)$$



de l'avant de la flèche et vous avez en perspective l'empenage avec les plumes. D'accord ? Là voici, ça c'est un vecteur entrant. Ok ? Bon, alors modélisons la dynamique rapidement ensemble. En passant par l'énergie, c'est beaucoup plus efficace, c'est beaucoup plus simple.

notes

résumé

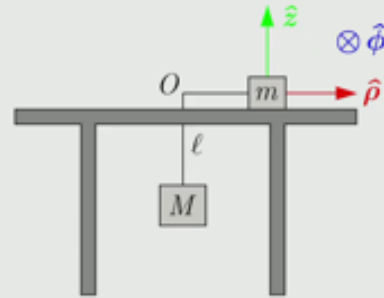
① Masse m :

- Energie cinétique : (A.9.1)

$$T_m = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2)$$

- Energie potentielle : (réf. table)

$$V_m = 0 \quad (A.9.2)$$

② Masse M :

- Energie cinétique :

$$T_M = \quad (A.9.3)$$

- Energie potentielle : (réf. table)

$$V_M = \quad \text{où} \quad (A.9.4)$$

D'accord ? Que de le faire avec Newton. Donc, on va d'abord introduire l'énergie cinétique liée au mouvement de la masse petit m qui reste en tout temps sur la table. Donc c'est une demi de sa masse petit m , fois sa vitesse v petit m au carré, c'est donc une demi de la masse, fois la somme des carré des composantes de la vitesse, alors il y a la composante radiale, c'est au point carré, la composante azimutale, qui est au carré, fi point carré. D'accord ? On va prendre un référence d'énergie potentielle de pesanteur au niveau de l'origine qui passe par le centre de masse, de la masse petit m , d'accord ? Donc, l'énergie potentielle de pesanteur contenue de cette référence est nul.

notes

résumé

4m 55s



- Longueur du fil : ($z < 0$)

(A.9.5)

 $\Rightarrow$

(A.9.6)

- Energie mécanique :

$$E = E_m + E_M =$$

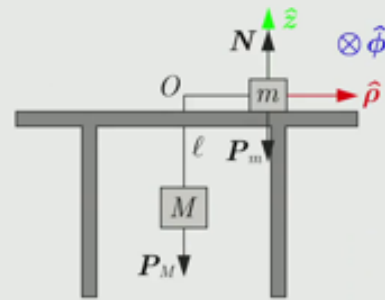
=

=

(A.9.7)

- Moment cinétique évalué en O :

(A.9.8)



Qu'en est-il maintenant du contrepoids de masse grand thème ? Eh bien, son énergie cinétique, c'est une demi de sa masse, fois sa vitesse v grand thème au carré, qui est une demi de la masse, fois quoi ? Fois la dérivée temporelle de la coordonnée verticale, z point, d'accord ? Elle v au carré. Bon. Maintenant, pour l'énergie potentielle de pesanteur, il faut faire attention, on a un axes z qu'on définit positif vers le haut. D'accord ? Donc, si on prend la coordonnée de la masse, qui se trouve ici, appelons cette coordonnée, la coordonnée z , et la coordonnée z sera négative. D'accord ? Donc, l'énergie potentielle de pesanteur, ses grands thèmes g , fois z , ou z est négatif, c'est donc bien une énergie potentielle négative. Attention à ça. Ok ? Voilà. Maintenant, on a besoin de colle pour recoller les morceaux. On a deux sous systèmes de masse qui sont liées par un fil. Le fil est inextensible. Ce qui veut dire concrètement, que si on prend la longueur totale du fil, on pourra dire que c'est la somme de la coordonnée de position radiale de la masse, ρ , plus la longueur qui se trouve ici, qui compte tenu du fait que z est négatif et moins z . D'accord ?

notes

résumé

5m 37s



- Longueur du fil : ($z < 0$)

$$\ell = \rho - z = \text{cte} \quad (\text{A.9.5})$$

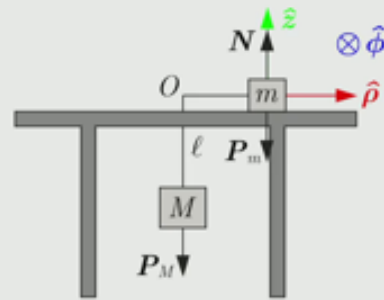
$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{\rho} \quad (\text{A.9.6})$$

- Energie mécanique :

$$\begin{aligned} E &= E_m + E_M = T_m + \underbrace{V_m}_{=0} + T_M + V_M \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + M g z \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{\rho}^2 + M g (\rho - \ell) \end{aligned} \quad (\text{A.9.7})$$

- Moment cinétique évalué en O :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_{O,m} + \vec{L}_{O,M} = \vec{r}_m \times m \vec{v}_m + \vec{r}_M \times M \vec{v}_M \\ &= \rho \hat{\rho} \times m (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi}) + z \hat{z} \times M \dot{z} \hat{z} = m \rho^2 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (\text{A.9.8})$$



Donc, la longueur du fil, l , c'est ρ moins z , et par ρ plus z , puisque z est négatif, c'est une constante. On peut donc dériver cette relation par rapport au temps. Elle est constante. Ce qui signifie que $\dot{z}$ point est égal à $\dot{\rho}$ point. On utilisera cette condition dans quelques instants. Maintenant, on a besoin de l'énergie mécanique totale, qui la somme des énergies mécaniques liées au mouvement de la petite masse m et du contrepois de masse grand m . Donc, c'est la somme de l'énergie cinétique de la masse petite m , plus son énergie potentielle, qui, par ailleurs, est nul, plus l'énergie cinétique de la masse grand m , ainsi que son énergie potentielle. Donc, ça va être une demi de m qui multiplie ρ point carré, plus ρ carré ϕ point carré, d'accord ? Plus l'énergie cinétique de la masse grand m , qui est une demi de grand m , fois $\dot{z}$ point au carré, reste l'énergie potentielle associée à la masse grand m , qui est grand $m g z$. Ok ? On a pas mal de degrés libertés ici, et on sait que le mouvement est lié. On sait qu'on peut réécrire z en termes de ρ moins l , et on peut écrire $\dot{z}$ point, termes de $\dot{\rho}$ point. C'est ce qu'on va faire. On aura donc une demi de la masse qui multiplie ρ point carré, plus ρ carré ϕ point carré, plus une demi de la grande masse, fois ρ point carré, et on a encore $m g$ qui multiplie ρ moins l . Ok ? Bon. Avant d'en déduire l'équation du mouvement, qu'on pourra faire rapidement, considérant que l'énergie mécanique est constante, il y a une grandeur qui va jouer un rôle important. C'est le moment cinétique, bien sûr. C'est tout l'objet de l'étude de ce problème. Ce moment cinétique, on va l'évaluer par rapport à un point stratégique, qui est ici, le centre, l'origine haut

notes

résumé

6m 57s



- Longueur du fil : ($z < 0$)

$$\ell = \rho - z = c s l \leftarrow \quad (A.9.5)$$

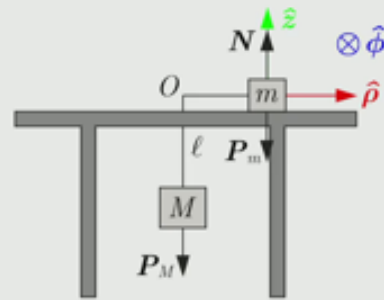
$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{\rho} \quad (A.9.6)$$

- Energie mécanique :

$$\begin{aligned} E &= E_m + E_M = T_m + \underbrace{V_m}_{=0} + T_M + V_M \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + M g z \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{\rho}^2 + M g (\rho - \ell) \end{aligned} \quad (A.9.7)$$

- Moment cinétique évalué en O :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_{O,m} + \vec{L}_{O,M} = \vec{r}_m \times m \vec{v}_m + \vec{r}_M \times M \vec{v}_M \\ &= \rho \hat{\rho} \times m (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi}) + z \hat{z} \times M \dot{z} \hat{z} = m \rho^2 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (A.9.8)$$



de la trajectoire circulaire, qu'on pourrait, par exemple, avoir pour le point matériel M , même si ce n'est pas forcément le cas. En imaginant qu'on a un mouvement circulaire, c'est un cas particulier, et bien clairement, on aurait envie de choisir l'origine pour décrire ce mouvement circulaire. Donc, le moment cinétique du système total évalué par rapport à l'origine, compte tenu du fait que c'est une grandeur extensive, c'est la somme des moments cinétiques évalués par rapport à l'origine pour la petite masse, qui se trouve sur la table, et pour le contrepoids, qui se trouve en dessous de la table. Alors, écrivons ces moments cinétiques avec les produits vectoriels. Commençons par le moment cinétique de la petite masse. Et bien, c'est le produit vectoriel de son vecteur position, avec la quantité de mouvement associée et quel produit de la masse faut la vitesse. D'accord ? Puis on a évidemment la même structure pour la grande masse, même si cette structure est en fait moins intéressante. Alors, faisons le calcul maintenant. Ça va être comme ce matin pour le mouvement gravitationnel. On prend le vecteur position de la masse M , qui est ici, qui est ρ fois $\hat{\rho}$ chapeau. D'accord ? On prend le produit vectoriel avec la masse, la vitesse qui s'écrit comme $\dot{\rho}$ point $\hat{\rho}$ chapeau, plus $\rho \dot{\phi}$ point fois $\hat{\phi}$ chapeau. D'accord ? C'est la vitesse en coordonnées polaires. Maintenant, pour la masse grande M , bien, son vecteur position, c'est z fois $\hat{z}$ chapeau. On prend le produit vectoriel avec le produit de la masse, faut la vitesse, qui est $\dot{z}$ point fois $\hat{z}$ chapeau. Alors, il est clair que le vecteur position, il est là, il est le nom du fil, d'accord ? Et le vecteur vitesse aussi. D'accord ? Donc, ces deux vecteurs sont collinaires, leur produit vectoriel est nul. La seule contribution intéressante, on le ressent bien intuitivement, ça va être celle liée

notes

résumé

- Longueur du fil : ($z < 0$)

$$\ell = \rho - z = c s l \leftarrow \quad (A.9.5)$$

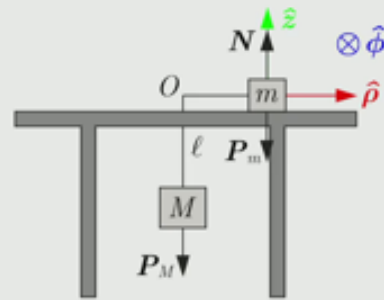
$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{\rho} \quad (A.9.6)$$

- Energie mécanique :

$$\begin{aligned} E &= E_m + E_M = T_m + \underbrace{V_m}_{=0} + T_H + V_H \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + M g z \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{\rho}^2 + M g (\rho - \ell) \end{aligned} \quad (A.9.7)$$

- Moment cinétique évalué en O :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_{O,m} + \vec{L}_{O,M} = \vec{r}_m \times m \vec{v}_m + \vec{r}_M \times M \vec{v}_M \\ &= \rho \hat{\rho} \times m (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi}) + z \hat{z} \times M \dot{z} \hat{z} = m \rho^2 \dot{\phi} \end{aligned} \quad (A.9.8)$$



à la petite masse qui peut tourner autour de l'axe vertical. D'accord ? Maintenant, le produit vectoriel de rho chapeau avec rho chapeau n'apporte aucune contribution. On renvoie le produit vectoriel intéressant. C'est celui de rho chapeau avec phi chapeau. C'est, d'après la règle du logo Mercedes, le produit vectoriel des deux premiers vecteurs unitaires dans l'ordre. Ça nous donnera donc le troisième. Le moment en mécanique, en sans doute bien, sera orienté selon z-chap. Ça va être donc $M, \rho^2, \dot{\phi}$, fois z-chap.

notes

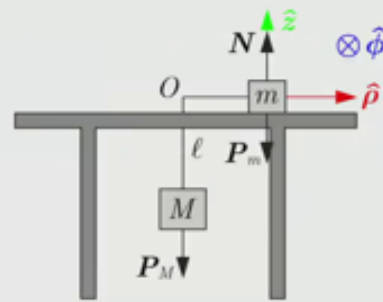
résumé

- Mouvement plan : masse m

(A.9.9)

- Théorème du moment cinétique :

(A.9.10)



⇒

(A.9.11)

- Énergie mécanique :

(A.9.12)

Ok. Ce qu'on aimerait montrer, évidemment,

notes

résumé

11m 25s



- Mouvement plan : masse m

$$\vec{p}_m + \vec{N} = \vec{0} \quad (A.9.9)$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \vec{H}_O^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}_O \quad (A.9.10)$$

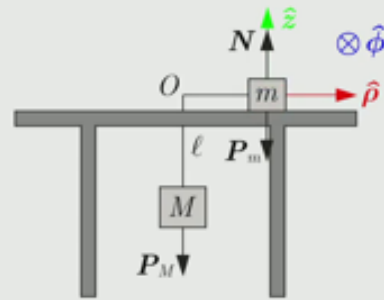
$$\vec{r}_m \times \vec{p}_m + \vec{r}_M \times \vec{p}_M + \vec{r}_m \times \vec{N} = 0$$

 $\Rightarrow$

(A.9.11)

- Energie mécanique :

(A.9.12)



c'est que le moment en siéthique va être constant. Pour le faire, il faudra appliquer le théorème du moment en siéthique, il faudra calculer des moments de force. Alors, quelles sont les forces extérieures qui sont exercées sur le système formé des deux masses ? Il y en a trois. Oui ? Ah, merci. Voilà. Il y en a trois. Il y a le poids des deux masses et il y a la force de réaction normale de la table. Vous pourriez peut-être me dire, mais elles sont où les tensions ? Les tensions, elles sont là, mais ce sont des forces internes au système. C'est des forces d'action et de réaction entre les deux masses. Donc les seules forces extérieures, celles et poids, et la force de réaction normale de la table. La massème, elle se déplace sur la table, ce qui veut dire que la force de réaction normale compense le poids et donc la somme vectorielle du poids et de la force de réaction normale est nulle. D'accord ? Ces forces sont égales et opposées. Alors maintenant, écrivons le théorème du moment en siéthique évalué par rapport au point O. C'est la dérivé temporelle du moment en siéthique évalué par le point O. C'est la dérivé temporelle du moment siéthique évalué par rapport à ce même point. D'accord ? Écrivons les moments de force. On a un premier moment de force qui est celui du poids de la masse petit m, qui est le pro-du vectoriel de son vecteur position avec le poids correspondant. Et on a également la même structure pour le poids de la masse grand m. D'accord ? Puis il nous reste encore un terme qui est le pro-du vectoriel de la position de la masse petit m avec la force de réaction normale. Bon. Ces deux vecteurs sont l'opposé l'un de l'autre. Les moments respectifs sont non-nuls. Seulement attention, ces moments respectifs font

notes

résumé

11m 32s



- Mouvement plan : masse m

$$\vec{p}_m + \vec{N} = \vec{0} \quad (A.9.9)$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \vec{H}_O^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}_O \quad (A.9.10)$$

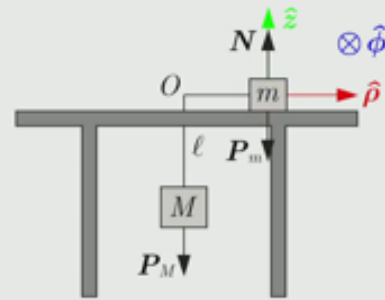
$$\vec{r}_m \times \vec{p}_m + \vec{r}_M \times \vec{p}_M + \vec{r}_m \times \vec{N} = \vec{0}$$

 $\Rightarrow$

(A.9.11)

- Energie mécanique :

(A.9.12)



intervenir des vecteurs qui sont de signes opposés. D'accord ? RM, la position de la masse m , est la même. Donc comme P_M est l'opposé de N ,

notes

résumé

- Energie mécanique :

(A.9.13)

- Le premier terme est l'énergie cinétique radiale, le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation et le dernier est l'énergie potentielle gravitationnelle.

- Conservation de l'énergie : $E = \text{cste}$

(A.9.14)

- Equation du mouvement :

(A.9.15)

- Mouvement circulaire uniforme :

(A.9.16)

ces deux moments, c'est simplifié. D'autre part, le poids de la masse grand m est évidemment verticalement orienté vers le bas. D'accord ? Et si on prend l'origine qui est ici, le vecteur position de la masse grand m est lui aussi orienté verticalement vers le bas. Donc ces deux vecteurs sont collinaires, ce qui veut dire que ce terme-là est nul également. D'accord ? Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que la dérivée temporelle du moment signétique évalué par rapport à l'origine est nulle. Et donc ce moment signétique est une constante. D'accord ? Sa composante verticale L , qui est ici $M^2 \phi$, sera donc une constante. On va pouvoir exploiter pratiquement, comme on l'a fait avec le mouvement gravitationnel ce matin. D'accord ? ϕ^2 , c'est donc L^2 divisé par M^2 foire à la puissance 4. D'accord ? Et donc l'énergie mécanique peut être écrite explicitement en termes de ρ et de ρ . Il n'y a plus de ϕ . Il n'y a plus non plus de z et de z . D'accord ? Donc l'énergie mécanique sera une demi de M qui multiplie ρ^2 Plus L^2 sur $M^2 \rho^2$, d'accord ? Plus une demi de grand thème ρ^2 plus MG foire moins L . OK ? On aimerait maintenant déterminer l'équation du mouvement. Alors avant de le faire ceci explicitement,

notes

résumé

13m 38s



- Energie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} (M+m) \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} + Mg(\rho-l) \quad (\text{A.9.13})$$

- Le premier terme est l'énergie cinétique radiale, le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation et le dernier est l'énergie potentielle gravitationnelle.
- Conservation de l'énergie : $E = \text{cste}$

$$\dot{E} = (M+m) \dot{\rho} \ddot{\rho} \quad (\text{A.9.14})$$

- Equation du mouvement :

(A.9.15)

- Mouvement circulaire uniforme :

(A.9.16)

on va encore un tout petit peu remettre en forme notre énergie mécanique. On va l'écrire comme une demi de grand thème plus petit M foire.² qui est le terme d'énergie cinétique lié au mouvement des deux masses lorsqu'on fait glisser le fil. D'accord ? Sans rotation. Maintenant la rotation de la masse M autour de l'axe vertical qui passe par l'origine donne une contribution à l'énergie qui est L^2 sur $2M$ et puis on a l'énergie potentielle qui est liée au mouvement de la masse qui se trouve sous la table qui est Mg qui multiplie ρ moins L . D'accord ? Ce qu'on veut maintenant évidemment, c'est l'équation du mouvement. Pour la trouver, on tient compte du fait que l'énergie est constante. Donc si on la dérive par rapport au temps, le résultat est nul. Alors faisons cette dérivée par rapport au temps explicitement. Point donc, on va pouvoir l'écrire. On va prendre le premier terme. On aura grand thème plus petit M qui est une constante et il faut dériver par rapport au temps une demi de ρ^2 . Ce qui va nous donner $\rho \dot{\rho}$. D'accord ? $\rho \dot{\rho}$. Le voici. Ensuite, on a L^2 sur M qui multiplie 1 sur ρ^2 . On doit dériver par rapport au temps 1 sur $2 \rho^2$. D'accord ?

notes

résumé

15m 29s



A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

Donc on a une demi de ρ à la puissance moins 2 qu'on dérive par rapport au temps. On va donc avoir moins ρ à la puissance, moins 3 fois ρ . Ok ? Donc si on écrit ceci, on a d'abord en facteur L^2 sur M . On a ensuite un $\rho^{.2}$ sur ρ^3 . Ok ? Le terme le plus simple c'est le dernier. L^3 c'est une constante, donc MGL disparaît. En revanche, quand on dérive au en $\rho^{.2}$, ce qui va évidemment nous donner $Mg^{.2}$. D'accord ? Ceci est égal à ça. Quand on prend cette équation, on peut la récrire comme une série de termes qui sont tous proportionnels à $\rho^{.2}$. Donc on met $\rho^{.2}$ en évidence. D'accord ? Cette équation doit être vérifiée quelle que soit la valeur de ρ . Ce qui veut dire que les termes qui multiplient $\rho^{.2}$ doivent être nul. D'accord ? L'étape suivante, celle qu'il faut toujours suivre quand on sait pas quoi faire, c'est divisé par la masse, plutôt par les masses. D'accord ? Donc on va diviser par la somme des masses grand m plus petit m . Et alors on trouve l'équation du mouvement qui est la suivante. $\rho^{.2}$ moins L^2 sur la masse m qui multiplie la somme des deux masses sur ρ au cube, plus grand m sur grand m plus petit m fois g est égal à 0. On a donc une équation différentielle qui décrit le mouvement du système entièrement en termes de la coordonnée radiale ρ et de sa dérivée temporelle seconde $\rho^{.p}$. Ok ? Oui ? Alors justement, si vous prenez l'équation précédente qui est ici, vous pouvez la récrire de la manière suivante, je vais peut-être juste faire en-dessus, avec le style ou la zère, c'est grand m plus petit m fois $\rho^{.p}$ moins L^2 sur m ρ cube plus mg qui multiplie globalement ρ . Et ça, c'est égal à 0. Cette équation doit

notes

résumé

17m 1s



A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

être vraie, quelle que soit la valeur de ρ . Il faut donc que les termes qui multiplient ρ s'annulent. Ces termes, on peut les diviser par grand m plus petit m et alors on tombe sur l'équation qui est ici. D'accord ? C'est toujours la logique à suivre. Quand vous dérivez l'énergie, vous allez avoir des termes en fait qui sont proportionnels à la vitesse par rapport au degré-liberté choisi. D'accord ? Et donc, la vitesse peut prendre n'importe quelle valeur et il faut que les termes qui la multiplient s'annulent et c'est ça qui donne l'équation du mouvement. Ok ? Alors la question qu'on peut se poser, c'est, y a-t-il un état d'équilibre ? Je vais vous montrer expérimentalement que oui. Le système qu'on est en train de décrire, il ressemble à ça. D'accord ? Vous avez une première masse fixée sous la table et vous avez une autre masse en-dessus et puis on peut imaginer la faire tourner dans un plan. D'accord ? Alors si on églie le frottement, vous voyez, on a un mouvement circulaire qui peut se faire et la masse reste à hauteur constante. Pourquoi elle descend ? Parce que justement, il y a du frottement. Mais en absence complète de frottement, on aurait donc un mouvement de rotation qui se fait avec une longueur de fil constante. Donc ça voudrait dire que sur la table, la masse tourne à vitesse angulaire constante. Alors, cette solution-là, on peut la trouver et surtout on peut déterminer le rayon. Comment est-ce qu'on la trouve ? En imposant que le rayon est constant, si le rayon est constant, la coordonnée radiale r est constante, donc gros point et nul. Donc si r point et nul s'implique que r est une constante, d'accord ? Et alors, si on prend l'équation qui est ici, on peut en déduire la coordonnée radiale d'équilibre. On va la trouver tout de suite

notes

résumé

A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

avec une racine publique. C'est la racine publique de L carré sur grand thème fois petit thème fois g pour vérifier que les unités s'ajoutent. D'accord ? On a donc trouvé... Alors, si... Oui, c'est dans votre sens, excusez-moi, mais concrètement, si $\dot{\theta}$ est constant, $\dot{\theta}$ point point et nul, mais si dans nos équations, on requiert que $\dot{\theta}$ point point soit nul, ça veut dire que $\dot{\theta}$ est constant. Ok ? Et alors, si $\dot{\theta}$ est constant, d'accord, on peut trouver sa valeur, qui est la racine publique de L carré, sur grand thème, petit thème, g . Ok ? On a trouvé ce mouvement circulaire uniforme d'équilibre. Ok ? C'est un joli exercice, mais le prochain est encore mieux. Le prochain,

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

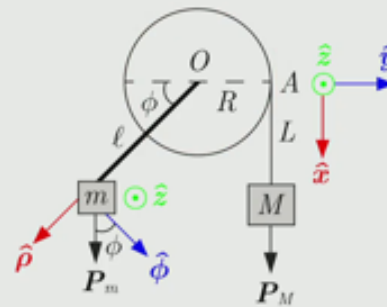
.....

.....

.....

.....

- Un disque de rayon R et de masse négligeable tourne verticalement autour de son centre O . Une barre de longueur ℓ et de masse négligeable est fixée sur le disque. Une masse m se trouve à l'extrémité de la barre.
- Un contrepoids de masse M est attaché à un fil de masse négligeable enroulé autour du disque. Le système est à l'équilibre.
- D'après le théorème du moment cinétique, à l'équilibre, la somme des moments de forces extérieures s'annule. Par conséquent, à l'équilibre, la somme vectorielle des moments de force dus aux poids P_m et P_M s'annule.



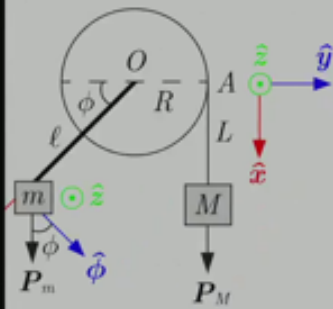
c'est l'étude de l'équilibre en rotation, qui se trouve en ce moment même sur la caméra 27. Clairement, le système que vous voyez ici, il est à l'équilibre. Sinon, il y aurait un déplacement ici du disque dans le plan vertical. Quand ? Alors, l'équilibre, il va dépendre de la distance qui sépare la petite masse ici du centre du disque. Est-ce que l'équilibre existe toujours ? Vérifions. Sont que ça soit pas le cas. D'accord ? Il y a une condition qui va intervenir. Et c'est justement l'angle d'équilibre qu'on aimerait trouver, ou les angles d'équilibre, voire lesquels sont stables et lesquels sont instables. D'accord ? Donc, voilà notre système. On a un disque. Pour simplifier les choses, on va considérer que la masse du disque est négligeable.

notes

résumé

21m 57s





À l'équilibre, la somme des moments est nulle. Par conséquent, à l'équilibre, la somme des poids P_m et P_M est nulle.

A.9.2 Equilibre en rotation

- Théorème du moment cinétique :

$$(A.9.17)$$

- Equilibre en rotation : (A.9.18)

- Moments de force :

①

②

- Equilibre en rotation : ($\phi \equiv \phi_0$)

selon $\hat{z}$: $\Rightarrow$ 

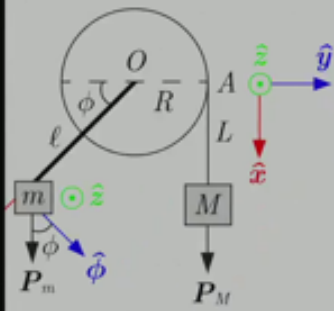
Prenez un disque qui serait en, par exemple, en nylon. D'accord ? Vous avez une barre de masse négligeable aussi. Au bout de la barre, vous avez une petite masse M . Vous avez une autre masse grande M fixée à un fil. Le fil est lui-même enroulé autour du disque. D'accord ? On aimerait décrire l'état d'équilibre. Concrètement, c'est un équilibre en rotation, puisque, intuitivement, on comprend bien que le poids ici de la masse grande M va vouloir faire basculer le système, va vouloir faire basculer le disque, d'accord ? Dans le sens trigonométrique. Alors que pour le contrepoids, c'est le contraire, il veut le faire basculer dans le sens égodie de montre. Donc, on va avoir une concurrence entre deux moments de force évalué par rapport au centre du disque et on veut l'état d'équilibre où les deux se compensent. D'accord ? Alors pour que nos calculs soient plus simples, on va introduire deux repères. On va introduire un repère cylindrique pour décrire les moments ou le moment lié au poids de la masse petite M et un repère cartésien pour l'autre. D'accord ? Ce qu'il va avoir en commun, c'est le même axe qui sort du plan, puisque évidemment, tout se joue autour de l'axe horizontal de rotation. Donc on prend un vecteur unitaire au chapeau orienté vers l'extérieur, si chapeau orienté vers le bas, si correspond ici à l'angle que fait la barre avec l'horizontale si l'angle est nul, c'est-à-dire que cette barre se trouve à l'horizontale ici. D'accord ? Et si il faut de pro-divectoriel des deux, voyez que Z va sortir du plan. Vous alignez l'index de la main droite sur l'aureau, le majeur selon $\hat{r}$, puis voyez que Z sort du plan. Bon. Alors, pour le deuxième repère, on veut que Z sorte aussi du plan. On va donc choisir X, Y en accord avec ceci. On va prendre un vecteur unitaire X

notes

résumé

22m 49s





à l'équilibre, la somme des
conséquent, à l'équilibre, la
aux poids P_m et P_M

A.9.2 Equilibre en rotation

- Théorème du moment cinétique :

$$(A.9.17)$$

- Equilibre en rotation : (A.9.18)

- Moments de force :

①

②

- Equilibre en rotation : ($\phi \equiv \phi_0$)

selon $\hat{z}$:

 $\Rightarrow$


chapeau qui est orienté vers le bas, Y orienté vers la droite, pro-divectoriel les deux, nous donnant Z qui sort du plan. D'accord ? Alors, pendant qu'on a compris le problème, on va le modéliser mathématiquement. Bon.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \vec{H}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \quad (\text{A.9.17})$$

- Equilibre en rotation : (A.9.18)

$$\vec{r}_m \times \vec{P}_m + \vec{r}_H \times \vec{P}_H = \vec{0}$$

- Moments de force :

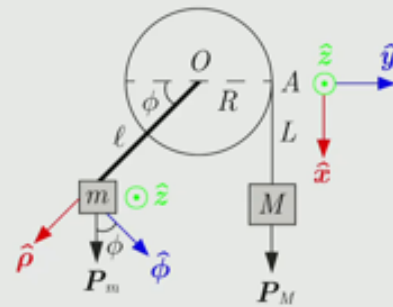
$$\bullet \vec{r}_m \times \vec{P}_m = \ell \hat{\rho} \times m g (\cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho}) = m g \ell \cos \phi \hat{z} \quad (\text{A.9.19})$$

$$\bullet \vec{r}_H \times \vec{P}_H = (R \hat{y} + \ell \hat{x}) \times M g \hat{x} \quad (\text{A.9.20})$$

- Equilibre en rotation : ($\phi \equiv \phi_0$)

$$\text{selon } \hat{z} : \quad (\text{A.9.21})$$

$$\Rightarrow \quad (\text{A.9.22})$$



Alors, on aura besoin du théorème du moment cinétique, et l'information physique, c'est qu'on est à l'équilibre, ce qui signifie concrètement que la somme des moments de force extérieures évaluée par rapport au point O, qui est ici le point d'attache de la barre sur le disque. D'accord ? Cette somme des moments est nulle. Bon. Écrivons les moments. Les deux seules forces extérieures qui interviennent dans le système formé des deux masses, c'est les poids des deux masses. Donc, on va avoir un premier moment pour le poids de la masse petite m, qui est le produit vectoriel de son vecteur position avec son poids, et un deuxième moment, lié au poids de la masse grande m, qui est le produit vectoriel de son vecteur position avec son propre poids. La somme de ces moments, donc, est nulle. Maintenant, on va détailler chaque moment. On va l'exprimer dans le repère correspondant. Commençons par le moment lié à la masse petite m. C'est le produit vectoriel de son vecteur position avec son poids. D'accord ? Le vecteur position de la masse petite m, c'est la longueur de la barre multipliée par le vecteur unitaire radial. Donc, on aura L fois rochapo dont on prend le produit vectoriel avec le poids, qui est mg , foie, quoi ? Faut que le vecteur unitaire orienté vers le bas qu'on peut projeter le long des vecteurs unitaires du repère cylindrique. D'accord ? Commençons par faire la projection selon rochapo. On va projeter sur le cathète qui est opposé à fi. Pour fi-chapo, c'est le cathète qui est adjacent. On va donc se retrouver avec le cosinus de fi foie fi-chapo plus le sinus de fi foie rochapo. Alors clairement, comme le vecteur position de la barre est selon rochapo, la contribution du poids qui est le long de la barre ne joue aucun rôle dans le produit vectoriel. Ok ? Alors maintenant, le produit

notes

résumé

24m 49s



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \vec{H}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \quad (\text{A.9.17})$$

- Equilibre en rotation : (A.9.18)

$$\vec{r}_m \times \vec{P}_m + \vec{r}_H \times \vec{P}_H = \vec{0}$$

- Moments de force :

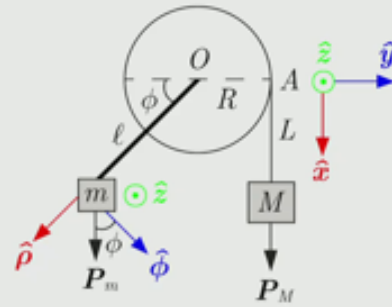
$$\bullet \vec{r}_m \times \vec{P}_m = \ell \hat{\rho} \times m g (\cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho}) = m g \ell \cos \phi \hat{z} \quad (\text{A.9.19})$$

$$\bullet \vec{r}_H \times \vec{P}_H = (R \hat{y} + L \hat{x}) \times M g \hat{x} \quad (\text{A.9.20})$$

- Equilibre en rotation : ($\phi \equiv \phi_0$)

$$\text{selon } \hat{z} : \quad (\text{A.9.21})$$

$$\Rightarrow \quad (\text{A.9.22})$$



vectorel de rochapo avec fi-chapo, les deux premiers vecteurs dans l'ordre du repère cylindrique, ça nous donne le troisième, ça donne z-chapo. Et puis le facteur qui est devant, c'est MGL foie le cocinus de fi. Première question à se poser, est-ce que c'est raisonnable, physiquement parlant ? Qu'est-ce que ça signifie ? Le moment, il sort du plan. D'accord ? Alors vous prenez la pomme de la main droite et vous la faites tourner comme ceci. Ça veut dire que le poids, il veut entraîner le système, dans quel sens ? Dans le sens cylindrique, c'est correct, c'est exactement ce qu'on voit. D'accord ? Là, vous pouvez vous aider de vos yeux. C'est important quand vous faites des calculs de voir que c'est cohérent au niveau géométrique. Ok ? Donc intuitivement, maintenant, sans vous aimer avoir fait de calcul, l'autre moment doit être orienté selon moins vos z-chapo pour pouvoir compenser. D'accord ? Verifions. On prend le produit vectoriel, donc, du vecteur position de la masse grand-tête avec son poids. On écrit les choses proprement. On sait que notre disque est un rayon R. On sait aussi que la longueur du fil ici, c'est L. Bon. Alors, le vecteur position de la masse grand-tête, c'est le vecteur OA, plus le vecteur qui va de A à M. D'accord ? Le vecteur OA, c'est un vecteur dont la norme vaut grand-tête, qui est orientée selon Y-chapo. Le vecteur qui va de A à la masse M, c'est un vecteur de norme L qui est orienté selon X-chapo. On aura donc R, Foy-chapo, plus L, Foy-x-chapo. Produit vectoriel avec le poids de la masse grand-tête, qui est Mg Foy-x-chapo. Alors, on voit tout de suite que la contribution verticale de la position n'apporte aucun rôle, enfin, nous jouons aucun rôle, n'apporte aucune contribution significative au produit vectoriel.

notes

résumé

- Condition d'équilibre : mathématique

(A.9.23)

- Interprétation physique :

Pour un disque de rayon R donné et des masses M et m fixées, la barre doit être assez longue pour que l'équilibre existe.

- Angles d'équilibre :

(A.9.24)

Il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite horizontale qui passe par le centre O du cercle.

- Pour déterminer la stabilité de ces positions d'équilibre, on choisit comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle cette droite horizontale passant par le point O .

Qu'est-ce qui va nous rester ? Le produit vectoriel entre $\mathbf{R}$ -Hydraic-chapo et $\mathbf{Mg}$ -x-chapo. Attention, attention. D'après la règle du logo Mercedes, c'est le produit vectoriel du deuxième vecteur avec le premier. Ce n'est pas le troisième, c'est moins le troisième. C'est donc moins Z-chapo. Donc, on se retrouve avec $\mathbf{Mg}$ -R Foy-z-chapo, et il ne faut pas oublier le signe moins qui est ici. Alors, ça aussi, c'est raisonnable, puisque moins Z-chapo est orienté vers l'arrière. Il rentre dans le plan. Alors, si vous faites rentrer dans le plan le pouce de la main droite, vous voyez que la paume, tout dans le sens des aiguilles d'une montre, elle veut donc faire pivoter le système vers la droite. C'est exactement ce qu'on voit, c'est exactement ce qu'on comprend intuitivement. D'accord ? Alors, maintenant, on va simplement écrire l'équilibre en rotation. C'est-à-dire qu'on va projeter la somme des moments qu'on vient de trouver le long de l'axe Z, le long de l'axe de rotation du disque. Ok ? On a une première contribution liée au poids d'Amaz-Patitem, qui est $MGL \cos \theta$. Une deuxième contribution liée au poids de l'Amaz-Grantem, qui est MGR , avec un signe moins, et ceci est égal à zéro. D'accord ? Et donc, qu'est-ce qu'on en tire, comme conclusion ? Eh bien que le $\cos \theta$, c'est MR sur $Patitem L$. Et ça, c'est strictement positif. Oui, mais il y a une contrainte qui est imposée sur un $\cos$ qui est positif. C'est quoi cette contrainte ? Oui ? Et où est-ce le constraint ? Exactement. Il est borné supérieurement par 1. Alors, écrivons cette contrainte.

notes

résumé

28m 37s



- Energie potentielle : longueur du fil :

(A.9.24)

- Positions d'équilibre :

(A.9.25)

 $\Rightarrow$

(A.9.26)

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} =$$

(A.9.27)

1 Si $\Rightarrow \Rightarrow$ équilibre stable (dessous)

2 Si $\Rightarrow \Rightarrow$ équilibre instable (dessus)

Le Cossinus 2F0, qui est donc MR sur Patitem L, doit être plus petit ou égal à 1, puisqu'on sait qu'il est clairement positif. Ok ? Donc, on peut traduire ces dernières inégalités, on la remettant en forme. Physiquement, ça signifie que si la masse du contrepoids est fixée, que la petite masse M est fixée aussi, que le rayon du disque est imposé, le seul paramètre libre, c'est la distance à laquelle on place la masse Patitem du sang du disque. Donc, cette longueur L doit être plus grande ou égal à MR sur Patitem. Donc, l'équilibre n'existe pas toujours. Pour que l'équilibre puisse exister, il faut que la masse Patitem soit suffisamment éloignée du disque pour que le moment de force liée à la masse Patitem puisse compenser le moment de force exercée par la masse Grandem. C'est équilibre. Vous le voyez ici. D'accord ? Si maintenant, je rapproche la masse Patitem, que va-t-il se passer ? Le système remonte pour que le moment exercé par la masse Patitem qui est maintenant plus proche du centre soit égal. D'accord ? Ainsi, le sinus sera plus grand. Continuez. Vous voyez, il remonte progressivement. Bon. On peut encore la faire remonter un petit peu. On la fait trop remonter. Là, on a encore une solution d'équilibre. On s'approche de la limite. Là, on a dépassé la limite. Si il est un petit peu en-dessus de la position horizontale, il bascule vers votre droite. S'il est en-dessous, il bascule aussi vers la droite. Pourquoi ? Parce que c'est de toute façon ce poids-là qui va l'emporter. D'accord ? Remettons-nous en position d'équilibre maintenant. Et étudions les positions d'équilibre et leur stabilité en partant de l'énergie. Avant de faire ça, mentionnons rapidement que lorsqu'on a une condition d'équilibre qui a cette forme, on a le cosinus de phi zéro, qui est MR sur ML. Vous savez très bien que si vous avez

notes

résumé

30m 27s



- Energie potentielle : longueur du fil :

(A.9.24)

- Positions d'équilibre :

(A.9.25)

 $\Rightarrow$

(A.9.26)

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} =$$

(A.9.27)

❶ Si $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ équilibre stable (dessous)

❷ Si $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ équilibre instable (dessus)

un angle dans le cosinus où une valeur, eh bien l'angle opposé aura un cosinus qui vaut la même valeur. Le cosinus de X est égal au cosinus de moins X, ce qui veut dire qu'il y a deux angles d'équilibre. Les angles d'équilibre phi zéro seront donc plus ou moins l'arc cosinus de MR sur ML. Là, on a une position d'équilibre. Ce que je suis en train de dire, c'est que si on prend le symétrique de ceci, c'est aussi une position d'équilibre. Il est clair qu'on n'en a pas l'intuition. Pourquoi ? Parce qu'elle est instable et c'est ce qu'on va montrer. D'accord ? Celle-là est stable, l'autre est instable. Alors pour le montrer,

notes

résumé

- Energie potentielle : longueur du fil : $L = L_0$ (A.9.24)

- Positions d'équilibre : (A.9.25)

$$\Rightarrow \quad (A.9.26)$$

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (A.9.27)
- $$\left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} =$$

1 Si $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ équilibre stable (dessous)

2 Si $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ équilibre instable (dessus)

il faut de nouveau qu'on passe par les énergies. On va introduire une paramétrisation. On va écrire que la longueur du fil entre le disque et le contrepoids de masse grand thème, c'est la longueur qu'on a dans la situation particulière où la barre est horizontale et où l'angle phi est nul. Si la barre n'est pas horizontale, mais qu'elle est décalée vers le bas, la longueur de fil décalée vers le bas est liée à l'angle phi par herfi.

notes

résumé

33m 39s



- Energie potentielle : longueur du fil : $L = L_0 - R\phi$

$$V = -mg\ell \sin\phi - M_g(L_0 - R\phi) \quad (\text{A.9.2})$$

- Positions d'équilibre :

(A.9.2)

 $\Rightarrow$

(A.9.2)

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = \quad (\text{A.9.2})$$

1	Si	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	équilibre stable (dessous)
2	Si	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	équilibre instable (dessus)

Donc il faut retrancher à cette valeur herfi. Ok ? Ça, c'est important. Alors maintenant, l'énergie potentielle, l'énergie potentielle de pesanteur, par rapport à la droite horizontale qui passe par le centre du disque, ça va être quoi ? Ça va être le poids de la masse petite m . Multiplié par la distance qu'il a séparé de la droite horizontale qui passe par l'origine. C'est tout simplement la longueur de la barre fois le sinus de l'angle ϕ . Attention, c'est négatif, on met un cil-de-moi. De la même manière, l'énergie potentielle de pesanteur de la masse grand thème, ça va être moins m fois g , qui multiplie grand l et grand l , c'est l_0 moins herfi. Alors peut-être juste, je vais faire un petit fris ici,

notes

résumé

34m 13s



- Energie potentielle : longueur du fil : $L = L_0 - R\phi$

$$V = -mgl \sin \phi - Mg(L_0 - R\phi) \quad (A.9.24)$$

- Positions d'équilibre :

$$(A.9.25)$$

$$\Rightarrow$$

$$(A.9.26)$$

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = \quad (A.9.27)$$

1 Si $\Rightarrow \Rightarrow$ équilibre stable (dessous)

2 Si $\Rightarrow \Rightarrow$ équilibre instable (dessus)

ce que je suis en train de dire, c'est que cette longueur-là, c'est en fait la longueur, lorsque la barre est horizontale, qui est l_0 , à laquelle on retranche la longueur de fil enroulée, lorsque la barre est déviée vers le bas d'un angle ϕ , c'est la longueur d'arc que vous avez ici, c'est donc r fois ϕ . Ok ?

notes

résumé

35m 1s



- Energie potentielle : longueur du fil : $L = L_0 - R\phi$

$$V = -mgl \sin \phi - Mg(L_0 - R\phi) \quad (\text{A.9.24})$$

- Positions d'équilibre :

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (\text{A.9.25})$$

$$\Rightarrow \quad (\text{A.9.26})$$

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = \quad (\text{A.9.27})$$

1 Si $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ équilibre stable (dessous)

2 Si $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ équilibre instable (dessus)

Donc l, c'est l0 moins herfi qu'on retrouve ici. Alors pour voir que c'est correct, on va maintenant dériver l'énergie potentielle totale par rapport à l'angle phi. On l'évalue à l'équilibre, soit en phi, égal phi zéro. Ok ? La dérivée du sinus par rapport à l'angle, c'est le cosinus.

notes

résumé

35m 25s



A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

On aura moins mgL que sinus de ϕ évalué en ϕ zéro, que sinus de ϕ zéro. D'accord ? L0, c'est une constante, donc quand on la dérive, on n'a rien qui reste. En revanche, dans notre herfi, quand on dérive par rapport à ϕ , il va nous rester moins r , qui va se simplifier avec le moins qui est en évidence, on va se retrouver au final avec un mgR . Et ceci doit être égal à zéro. D'accord ? Le potentiel est extrêmement à l'équilibre. Est-il maximal ? Est-il minimal ? Ça dépend d'équilibre dont on est en train de parler. D'accord ? Donc on peut tirer de ceci l'information qu'on avait déjà, le cosinus de ϕ zéro, $7mR$ sur mL , c'est strictement positif, c'est rassurant, mais les deux approches nous amènent au même endroit. Ce moment-là, on peut aller plus loin, puisque maintenant, on va pouvoir calculer la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à l'onglet ϕ pour trouver le signe de la courbure de l'énergie potentielle autour de la valeur extrême ϕ zéro pour savoir si c'est un minimum ou un maximum. Alors clairement, on voit pour cette position stable que l'angle ϕ , que fait la barre avec l'horizontale, est un angle aigu. D'accord ? L'autre angle sera aussi un angle aigu, mais dans le quatrième quadrant trigonométrique, ce qui veut dire que l'angle ϕ zéro est strictement compris dans l'intervalle qui va de moins π sur 2 non compris à π sur 2 non compris. D'accord ? Alors quand on dérive, par rapport au temps, la dérivée première que vous avez ici, MGR , c'est une constante, on la dérive, ça nous donne zéro, la dérivée du cosinus va nous donner, de moins le cosinus va nous donner le sinus, on aura donc MGL sinus de ϕ zéro. Et donc, dans le cas où l'angle ϕ zéro est positif, le sinus de ϕ zéro est positif,

notes

résumé

35m 47s



A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

on a un équilibre stable, on se retrouve avec un minimum de l'énergie potentielle de pesanteur. Dans le cas maintenant, où ϕ zéro est négatif, le sinus de ϕ zéro l'est aussi, on a un maximum, d'accord ? C'est-à-dire qu'on a une forme concave pour l'énergie potentielle de pesanteur autour de la valeur extrême, c'est un équilibre, un stable. D'accord ? Alors clairement, intuitivement, la situation pour laquelle l'énergie potentielle de pesanteur est maximale, c'est celle où la barre est le plus haut. D'accord ? Celle où elle est minimale, celle où la barre est le plus bas. Si ϕ zéro est positif, comme ϕ zéro est compté positif vers le bas, on se retrouve en dessous de la droite horizontale qui passe par l'origine, cette position d'équilibre est stable. Si je me déplace vers le bas, la barre remonte. Si je me déplace vers le haut, la barre redescend, et donc il y a un mouvement harmonico-ciatoire autour de cette position d'équilibre qui, pour le coup, est stable. En revanche, si je prends son symétrique, si je suis en-dessus de la position d'équilibre, le système bascule ici vers votre droite, si je suis en-dessous, il bascule vers la gauche, et donc la position d'équilibre, comme on le présentait intuitivement, est instable. D'accord ? On ne va pas traiter le cas de la balance de torsion de Cavendish, vous le ferez en exercice vendredi. D'accord ? En revanche, j'aimerais terminer avec une petite discussion sur la relativité et l'expérience que je vous ai promis, qui est l'effet saignac. D'accord ? Alors, il faut que je vous parle un tout petit peu de relativité restreinte. La révolution de la relativité restreinte, ça a été de considérer, basé sur les lois de transformation des champs électromagnétiques, que la vitesse de la lumière dans le vide était une constante cinématique. Elle est la même dans tous les référentiels, c'est ce qu'a affirmé Albert

notes

résumé

A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

Einstein. Alors, si maintenant, vous prenez un rayon lumineux émis par un dispositif avec un laser, qui est placé sur le toit d'un TGV en marche, par rapport au référentiel du toit du TGV, la vitesse du rayon laser, c'est la vitesse de la lumière. Naivement, si on n'a jamais fait de relativité, qu'on se place au sol, qu'on regarde le train passer à grande vitesse, la vitesse du rayon lumineux devrait être la somme de la vitesse de la lumière et de la vitesse de déplacement du train par rapport au voie. Ce qui n'est pas vrai, parce qu'en relativité, cette vitesse est deux fois la même. Alors, vous me direz, mais c'est impossible. Oui, en physique classique, c'est impossible. Quelle est la parade, quelle est la solution ? Le concept même de distance et d'intervalle de temps va dépendre du référentiel choisi, ce ne sera pas le même. Ce qui veut dire que si vous avez un objet qui se déplace très rapidement sous vos yeux, vous allez le voir plus court qu'il n'est vraiment. D'accord ? Et si vous mesurez un intervalle de temps, vous allez voir qu'il y a une dilatation du temps et donc une contraction des longueurs, les deux qui se compensent, de sorte que l'intervalle d'espace-temps reste constant. Alors, c'est cette contraction des longueurs qu'on va pouvoir mettre en évidence. Alors, on pensera qu'il faut envoyer un objet à une vitesse qui est une fraction significative de la vitesse de la lumière pour le voir. Ce n'est pas vrai. Il y a une parade, la parade, c'est la suivante. Vous avez ici 30 mètres de fibre optique qui est enroulé de manière circulaire. Vous avez deux fils, le long desquels des photons se déplacent et, à la fin, on crée une interference entre ces photons, qui est moitié constructive, moitié destructive. Cette interference, vous allez tout de suite la voir. C'est le petit

notes

résumé

A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

rayon, c'est le petit dot lumineux que vous voyez ici, le petit point qui apparaît à l'écran. Alors, maintenant, si je déplace cette fibre optique gentiment, on l'a fait tourner dans un sens, il y a une contraction des longueurs qui va se manifester tangentiellement. Alors, vous allez me dire, oui, mais c'est minime. Oui, c'est minime, seulement voilà. La longueur d'onde de la lumière aussi, elle est minime, c'est des centaines d'un anomètre. Et donc, cette contraction des longueurs va conduire à une interference constructive, dans un sens, destructive dans l'autre. Vous êtes prêts ? Vous allez visualiser la contraction des longueurs en orditoire. Regardez, c'est plus intense dans un sens, c'est moins intense dans l'autre. Vous voyez ? C'est léger, hein ? On va en arriver à le voir. Ok ? Oui, oui, c'est une manifestation de la relativité que vous voyez ici. Alors, allons plus loin, allons plus loin. Le rayon, il est fixé. Le mouvement, il est tangentiel, d'accord ? Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que dans cette configuration, la circonférence, due à la contraction des longueurs perçue dans le référentiel de l'auditoire, la circonférence, donc, est inférieure à deux pifs. Donc, au lieu de voir un joli cercle fermé, je vais utiliser une analogie, vous voyez un pacman. Vous voyez tout ce que c'est un pacman ? Vous avez un petit morceau de fromage qui manque. Bon. Alors, pour faire sens de ces expériences, que faudrait-il faire ? C'est recoler les morceaux ensemble. Il faudrait prendre le pacman, prendre les deux extrémités et les refermer. D'accord ? En faisant ça, vous créez un petit cône. D'accord ? En faisant ça, vous devez déformer la structure de l'espace et du temps. Pourquoi ? Pourquoi c'est pas de la relativité restreinte, cette expérience ? Ou presque ? Qu'est-ce qui n'est pas restreint là-dedans ? La relativité restreinte est une théorie qui s'applique à tous

notes

résumé

A.9.1 Table à trou

A.9.2 Equilibre en rotation

A.9.3 Balance de torsion de Cavendish

les référentiels d'inertie. Est-ce que c'est un référentiel d'inertie, les référentiels en rotation ? Non ? C'est un référentiel à accélérer. Il y a une accélération centripète. On n'est plus en relativité restreinte, on est en relativité générale, et donc on est obligé de courber la structure de l'espace et du temps pour rendre compte de ce qui se passe. D'accord ? C'est une autre manière de vous démontrer qu'on a besoin en relativité générale de courber la structure de l'espace et du temps pour rendre compte des phénomènes physiques. D'accord ? Oui, il y a une question ? Des latérales, ils sont déclarés ? Non, c'est vraiment lié au fait que vous avez une interférence dans un sens qui est plus constructive dans l'autre, plus destructive. D'accord ? C'est vraiment de la relativité que vous pouvez voir. Alors, tout ceci est parti d'une boutade. À l'époque, je pensais qu'il n'y avait pas de manie simple qu'on pouvait réaliser pour démontrer la contraction des longueurs. D'accord ? Et c'est là qu'on m'a parlé de l'effet saignac. Et c'est cet effet saignac que vous pouvez maintenant admirer. C'est absolument magnifique. Parce que ces concepts de relativité semblent être des concepts de physicien fou, d'accord ? Qui a besoin d'imaginer quelque chose de non tangible pour trouver des effets assez contractutifs ? Eh bien non, c'est quelque chose qui se vérifie dans un auditoire, comme vous avez pu le voir. Je vous souhaite une excellente fin de journée. La semaine prochaine, on parlera du mouvement relatif. C'est pas simple, mais c'est très beau. Et avant de parler du mouvement relatif, on va faire décoller une fusée dans cet auditoire. La fusée va vous survoler. Donc, faites attention, protégez vos valeurs la semaine prochaine pour que vos ordinateurs soient mouillés.

notes

résumé